**GRUPO I**

**a)**

O Domínio de é , e é contínua em todo o seu domínio. Em particular está definida e é contínua no intervalo .

é também diferenciável em . Em particular é duas vezes diferenciável em .

Temos que

Representando graficamente, através do MATLAB:

A graph with a red line and blue line

Description automatically generated

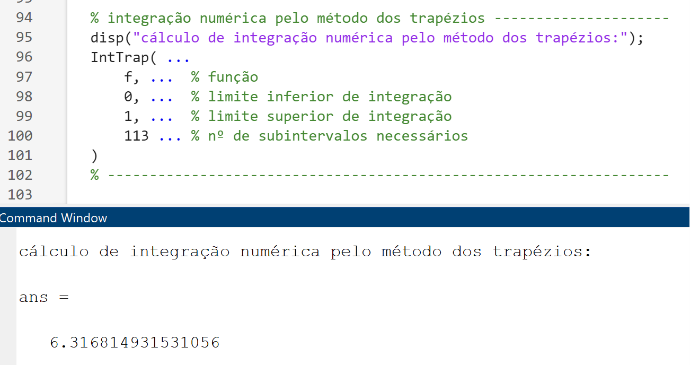
Verificamos que , logo o erro máximo cometido da aproximação realizada através da integração numérica pelo método dos trapézios é dado por:

, onde e corresponde ao nº de subintervalos.[[1]](#footnote-1)

Podemos então usar esta fórmula para calcular o nº mínimo de subintervalosnecessários para obtermos uma estimativa do integral com erro inferior a , resolvendo a seguinte inequação em ordem a :

E uma vez que , chegamos ao resultado:

Ou seja, precisamos de dividir o intervalo em, no mínimo, subintervalos para obtermos uma aproximação com um erro máximo de .

Podemos agora usar no MATLAB, a rotina de integração numérica pelo *método dos trapézios* e calcular aproximadamente o integral pedido.

Obtendo o resultado:

[link para o script em MATLAB](https://bitbucket.org/rzzzv/iscte_topicos_de_matematica_matlab/src/main/Trabalho%202/T2_grupo_1_alinea_a.m)

**b)**

O polinómio de MacLaurin de ordem 3, para a função de , é dado por:

onde é o resto de Lagrange

Efetuando os cálculos, vem:

Integrando este polinómio, temos:

Comentando, e pondo em perspetiva com os resultados anteriores, podemos então analisar que, tendo em conta que a área do integral pedido é . (resultado obtido no MATLAB com o comando**[[2]](#footnote-2)** *eval(int(f(x), 0, 1))*) e que o resultado obtido pela rotina do *método dos trapézios* (satisfazendo o erro máximo pedido)foi de . O resultado agora obtido**[[3]](#footnote-3)**, calculando o integral do polinómio de MacLaurin de 3ª ordem, foi como esperado, uma aproximação menos precisa, pois o polinómio de ordem 3 é uma aproximação local (centrada em zero) e não captura adequadamente o comportamento global da função, em particular, em todo o intervalo de integração.

Calculando o erro relativo para os dois métodos verificamos que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Erro relativo para o método dos trapézios** | **Erro relativo para o polinómio de MacLaurin de 3ª ordem** |
|  |  |
| O erro relativo para o método dos trapézios é muito baixo, indicando uma aproximação bastante precisa. | O erro relativo para o polinómio de MacLaurin de ordem 3 é mais significativo, indicando que a aproximação é menos precisa. |

**GRUPO II**

**a)**

Para calcular numericamente os valores de , para , pelo método dos pontos médios, e cometendo um erro máximo de , precisamos de calcular para cada , o nº mínimo de subintervalos na partição de .

Ou seja, precisamos de encontrar:

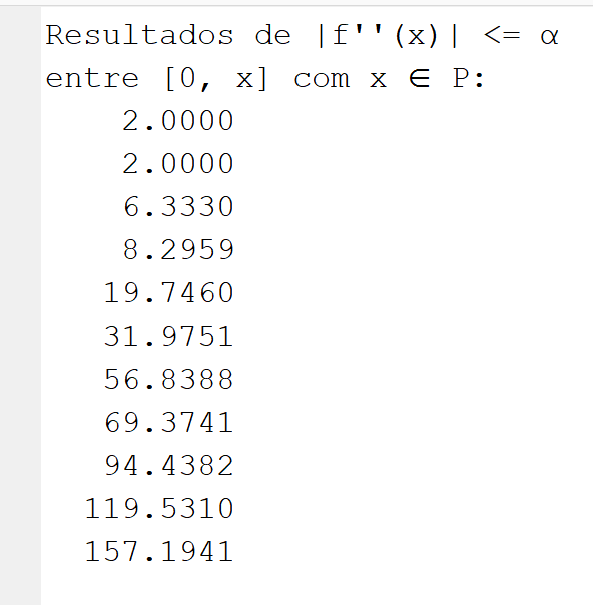
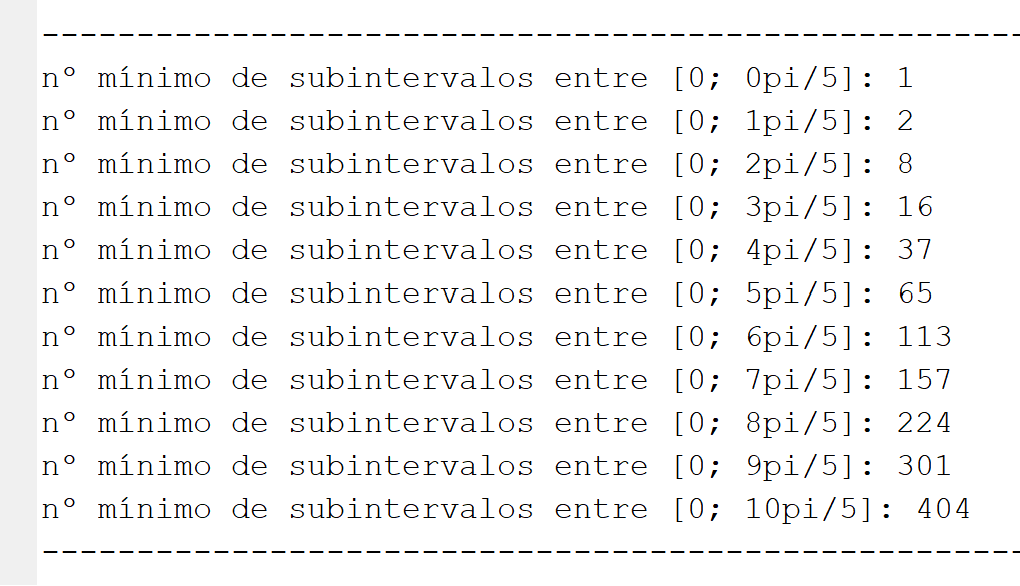
, onde

Portanto, para encontrarmos este , precisamos de encontrar o valor máximo em módulo no intervalo para . Isso foi conseguido graças à:

* utilização da função [*fminbnd*](https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminbnd.html) (que procura um mínimo local num dado intervalo);
* transformação da função 2ª derivada de na função:
* e ao algoritmo de pesquisa que pode ser encontrado no ficheiro:

[*Rotina\_encontrar\_valores\_max\_em\_modulo\_de\_P\_em\_f2.m*](https://bitbucket.org/rzzzv/iscte_topicos_de_matematica_matlab/src/main/Trabalho%202/Rotina_encontrar_valores_max_em_modulo_de_P_em_f2.m)

Pelo que se chegou aos seguintes resultados:



Assim, os resultados obtidos ao calcular numericamente os valores de , para , pelo método dos pontos médios (através da rotina *IntMPM*) e cometendo um erro máximo de , foram:

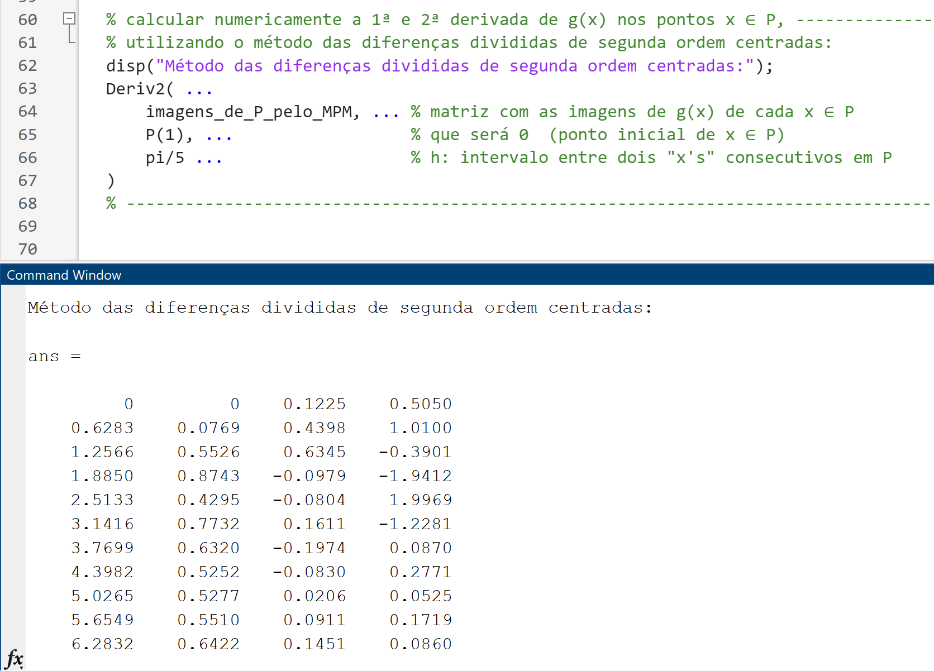
A white sheet with black text

Description automatically generated

[link para o script em MATLAB](https://bitbucket.org/rzzzv/iscte_topicos_de_matematica_matlab/src/main/Trabalho%202/T2_grupo_2_alinea_a.m)

**b)**

Uma vez que na alínea anterior se obteve os valores de , para , agora para calcular numericamente a 1ª e a 2ª derivadas de ) nesses pontos através do *método das diferenças divididas de segunda ordem centradas*, apenas precisamos de invocar a rotina *Deriv2* com os respetivos argumentos:

****

[link para o script em MATLAB](https://bitbucket.org/rzzzv/iscte_topicos_de_matematica_matlab/src/main/Trabalho%202/T2_grupo_2_alinea_b.m)

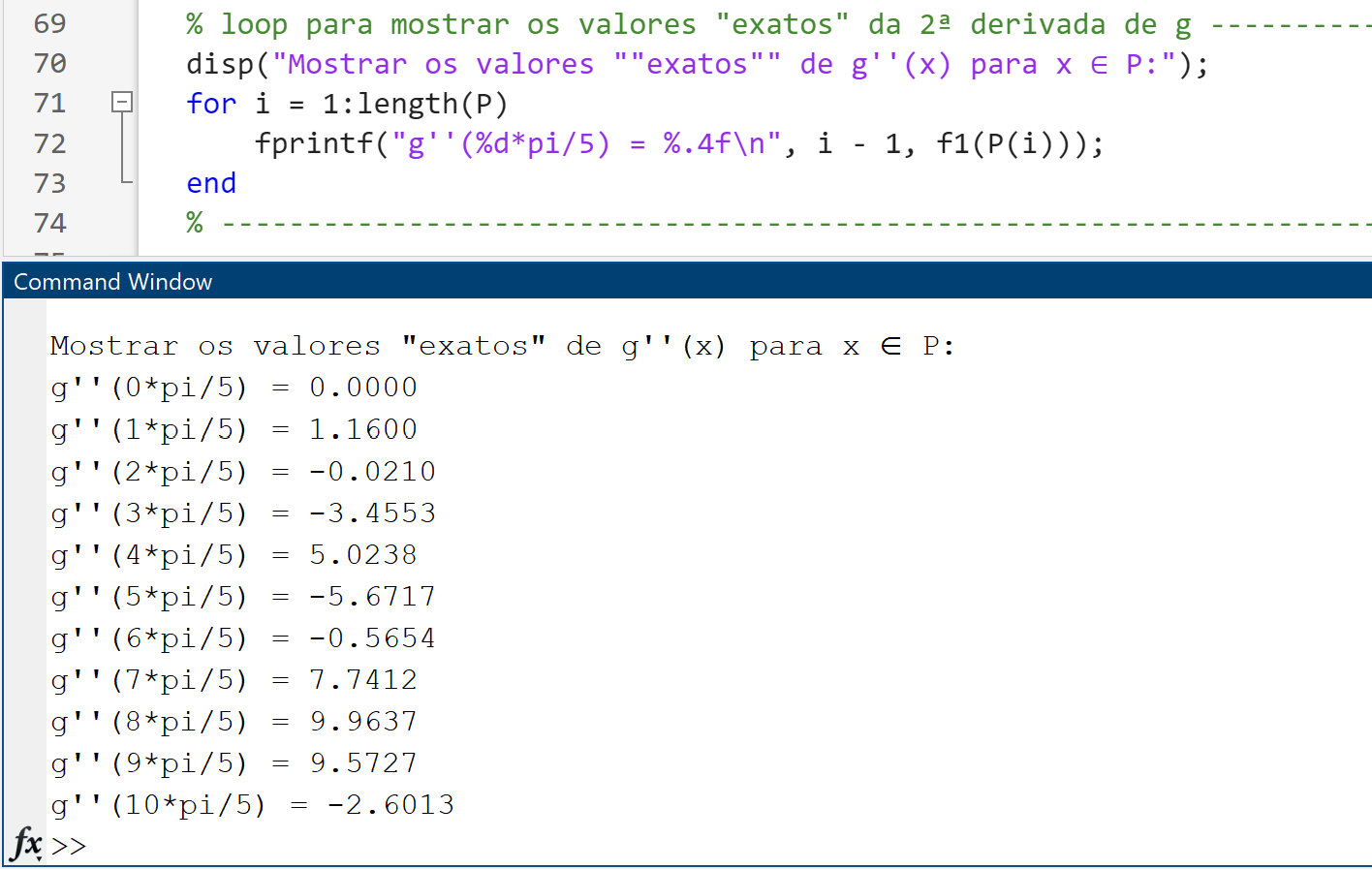
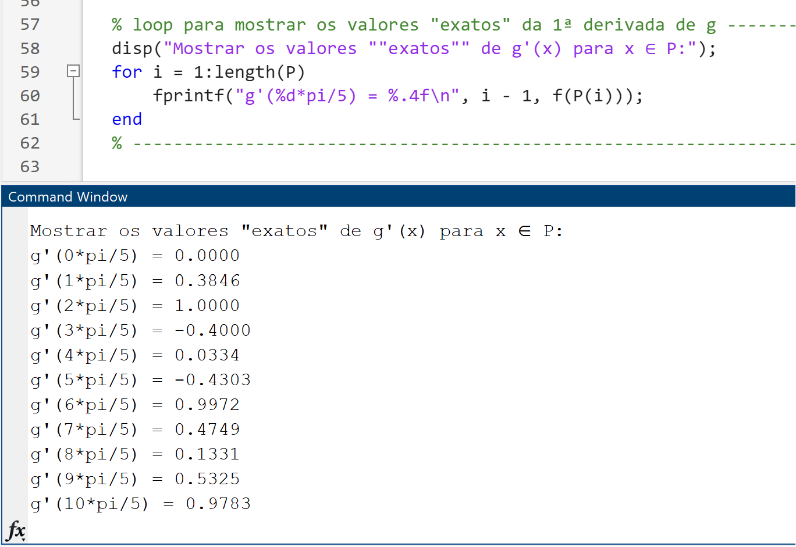
**c)**

é integrável e contínua em , então:

, com

É diferenciável em e tem-se:

e



[link para o script em MATLAB](https://bitbucket.org/rzzzv/iscte_topicos_de_matematica_matlab/src/main/Trabalho%202/T2_grupo_2_alinea_c.m) ([[4]](#footnote-4))

Comentando, e tomando como referência estes últimos valores obtidos pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* (pois constituem a aproximação mais precisa possível em relação aos valores exatos da 1ª e 2ª derivada de nos pontos ), verificamos que os valores obtidos pelo *método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas* forneceram, em alguns casos, aproximações razoáveis para as derivadas, nomeadamente nos subintervalos onde a função não sofre grandes diferenças de variação.

Porém, nota-se que, na maior parte dos casos, a aproximação não faz justiça ao valor exato, especialmente porque a função possui grandes mudanças rápidas.

E é natural que assim seja, pois, o *método das diferenças divididas de 2ª ordem centradas* faz uso da taxa média de variação e, portanto, assume esse erro e não tem em consideração as variações existentes nos pontos.

Já a taxa de variação instantânea conta com a noção e definição de limite e compreende precisamente a definição de derivada. Esta sim já indica como a função está “mudando” (em termos de monotonia) num ponto específico.

**Resultados das três alíneas numa única tabela:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | |  | |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1. [↑](#footnote-ref-1)
2. da pág. 5 da sebenta “*Notas sobre representação de superfícies em MATLAB*” de Alberto López Martín [↑](#footnote-ref-2)
3. também conseguido por via do MATLAB: [link para o script em MATLAB](https://bitbucket.org/rzzzv/iscte_topicos_de_matematica_matlab/src/main/Trabalho%202/T2_grupo_1_alinea_b.m) [↑](#footnote-ref-3)
4. lembrando que estes resultados “exatos” obtidos no MATLAB são também eles aproximações, porém mais próximas do valor real [↑](#footnote-ref-4)